LinAlg PVK HS20 04.01.21:

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \underbrace{\boxed{-1}}_{=0} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} \quad , \ \underline{\underline{Q}} \text{ orth.}, \ \underline{\underline{R}} \text{ r.o.d.}$$

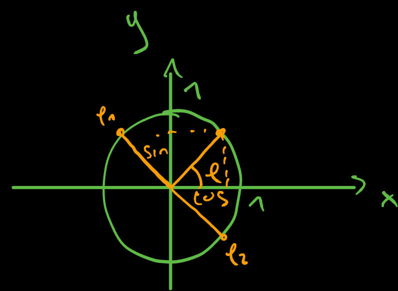
i) $a_{21} \to 0$

ii)

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \left| \qquad \begin{array}{cc} & 1 \\ & \\ & \\ 3 & \end{array} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{\boxed{\cdot}}_{a_{31}} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \to \underline{\underline{G}} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

iii)

$$\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi & 3\cos\varphi + 4\sin\varphi \\ \underbrace{\boxed{-\sin\varphi - \cos\varphi}}_{=0} & -3\sin\varphi + 4\cos\varphi \end{bmatrix}$$



iv) $\cos\varphi = -\sin\varphi \Rightarrow \varphi = 135°, 315°$

$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

v) $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}}$, $\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

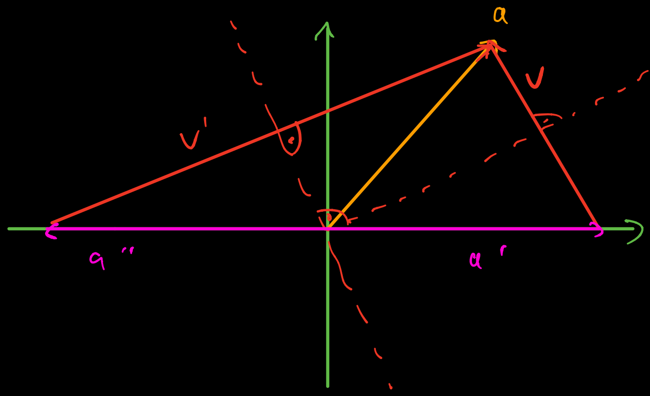
$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{R}}$$

vi) i) - v) für das nächste Element

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}}_2 (\underline{\underline{G}}_1 \underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{R}} \Rightarrow \underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{G}}_2 \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T = \underline{\underline{G}}_1^T \underline{\underline{G}}_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} = 0 & & \end{array} \end{array}$$



i) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $\underline{a}' = \|\underline{a}\| \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\|a\| = 3$

iii) $\underline{v} = a + a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$

$$\boxed{H = I - \frac{2}{v^T v} v v^T = I - 2uu^T} \quad \Big| \; u = \frac{v}{\|v\|}$$

iv)

$$\underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

v)

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

vi) $\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -3 & \star & \star \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \star & \star \\ \boxed{\star} & \star \end{matrix}} \\ 0 & & \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}'$

vii) i)-vi) mit $\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$ auf $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{H}}_2'$

$$\underline{\underline{H}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \underline{\underline{H}}_2' & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{H}}_2 \underbrace{(\underline{\underline{H}}_1 \cdot \underline{\underline{A}})}_{R'} = \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} -3 & * & * \\ 0 & \Delta & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{H}}_1)^T = \underline{\underline{H}}_1^T \underline{\underline{H}}_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a, b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a + b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \mid A^T = -A \}$, $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Überprüfen $\forall U_1, U_2 \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $(U_1 + U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1 + U_2)$ $\square$

(ii) $(\alpha \cdot U_1)^T = U_1^T \cdot \alpha^T = -\alpha \cdot U_1 = -(\alpha U_1)$ $\square$

Basis beweisen:

Beispiel: P_2, $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2 + x - 1,\ c^{(3)} = 2x^2 - 5x \}$

1) $$1 = \frac{1}{2} c^{(1)}$$

$$x = \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7}$$

$$x^2 = \frac{c^{(3)} + 5c^{(2)} + \frac{5}{2} c^{(1)}}{7}$$

C ist ein Erzeugendensys. & minimal, da nur 3 Vektoren für 3 dim. Raum → Basis

2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{G.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

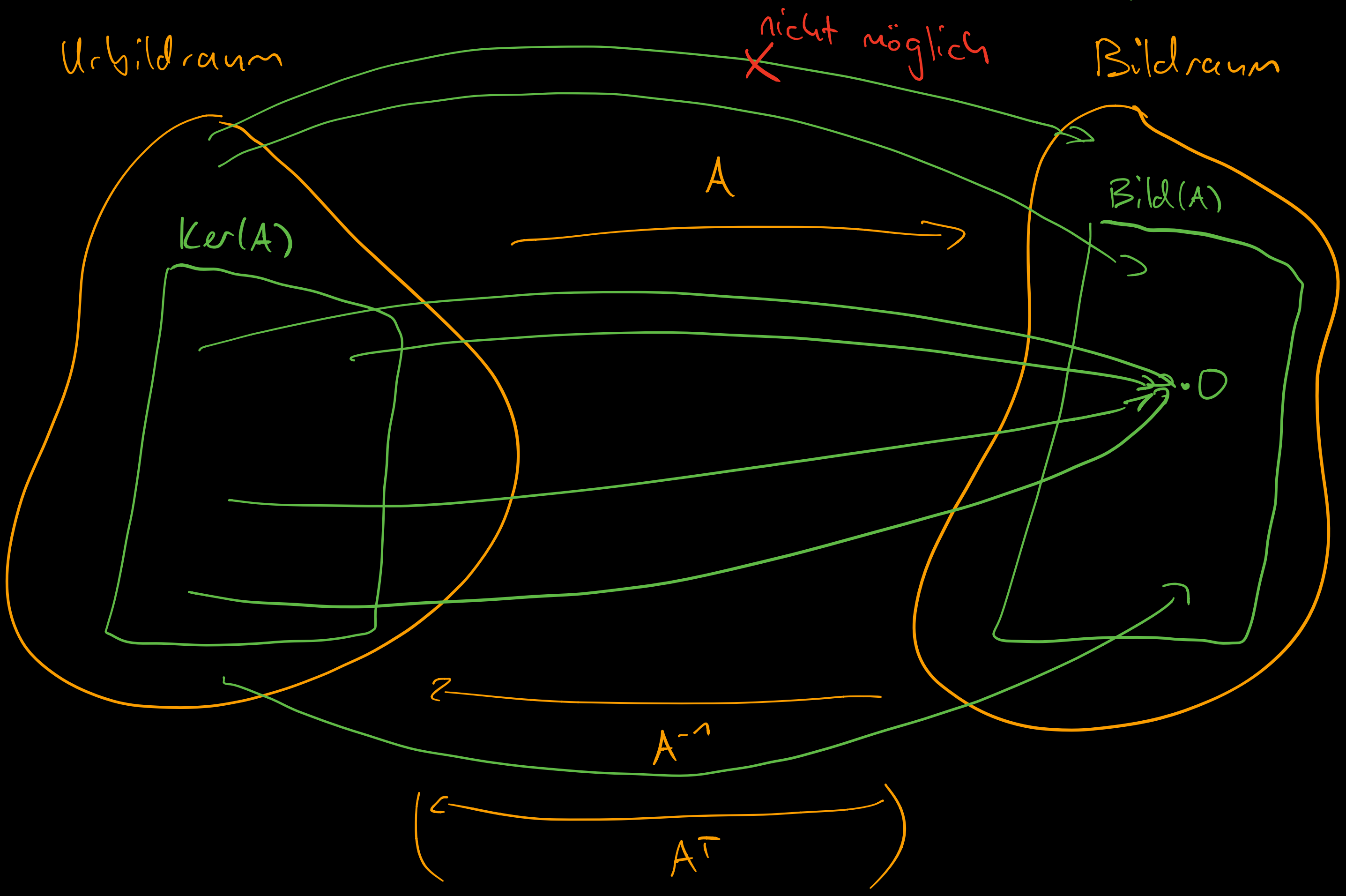
rang = 3 → lin. unabh.

⇒ ES ⇒ Basis

Basis von Kern & Bild:

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{4} \Big\} 3, \quad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots$$



Ker(A):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= t \in \mathbb{R} \\ x_4 &= s \in \mathbb{R} \\ x_2 &= \frac{3s - 3t}{2} \\ x_1 &= \frac{-x_3 - x_2}{2} = \frac{t - 3s}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{t}{4} - \frac{3}{4}s \\ -\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}s \\ t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

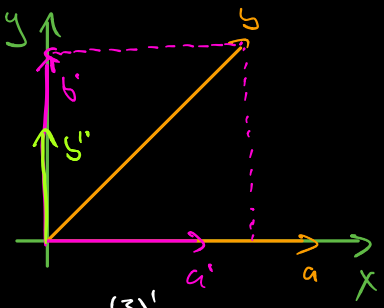
$$= \left\{ t \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$$

Lin. unabh. Spalten von A spannen das Bild auf.

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

b''

(ii) $e^{(2)'} = \underbrace{b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)} \rangle \cdot e^{(1)}}_{b'}$ & $e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)} \rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)} \rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: $\mathcal{P}_4$ mit $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

i) $e^{(1)} = \dfrac{1}{\|1\|} = \underline{1}$

$$\|1\| = \sqrt{\int_0^1 1 \cdot 1\, dx} = 1$$

ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1 \rangle 1$

$$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4\, dx = 3x^4 - \left[\frac{3}{5} x^5\right]_0^1$$

$$= \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$$

$$e^{(2)} = \frac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} =$$

$$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 \left(3x^4 - \frac{3}{5}\right)\left(3x^4 - \frac{3}{5}\right) dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\right) dx}$$

$$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \underline{\frac{4}{5}}$$

Verallgemeinerte Norm:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$= \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Induzierte Norm:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x,y,z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle = \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$

$x^T A(\lambda(y+z)) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z$ ✓

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

$x^T A y \underset{\uparrow}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T x = \underline{y^T A x}$ ✓

$x^T A y$ ist ein skalar!

iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

$x^T A x \geq 0$, $x^T A x = 0 \iff x = 0$

$\Rightarrow A$ positiv definit $\iff$ Alle EW von $A > 0$ ✓

Hurwitz-Kriterium: (nur für symm. Matrizen!)

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\det(2) = 2 > 0$, $\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$ pos. definit!

A^k - Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (T D T^{-1})^k x \qquad \text{falls } A \text{ min. halbeinfach ist!}$$

$$= T D \underbrace{T^{-1} T}_{I} D \underbrace{T^{-1} T}_{I} \cdots \underbrace{T^{-1} T}_{I} D T^{-1} x$$

$$= T D^k T^{-1} x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 \ddots & \\ \emptyset & & d_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 \ddots & \\ \emptyset & & d_n \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 \ddots & \\ \emptyset & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^k & & \emptyset \\ & d_2^k \ddots & \\ \emptyset & & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$= T D^k \underbrace{T^{-1} x}_{z}$$

$T^{-1} x = z$

$x = T z$ -> gaussen

$$= T D^k z$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} x \overset{?}{}$$

$$\text{EW: } \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{-2} & \overset{+}{2} \\ \overset{-}{-2} & \overset{+}{-\lambda} & \overset{-}{-2} \\ \overset{+}{1} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{2-\lambda} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 2] + 2[2\lambda - 2] + [2\lambda + 4]$$

$$= -\lambda [\lambda^2 - 2\lambda - 2] + 6\lambda \qquad \underline{\lambda_1 = 0}$$

$$= -\lambda [\lambda^2 \underbrace{-2\lambda}_{+} \underbrace{-8}_{\cdot}] = -\lambda (\lambda - 4)(\lambda + 2) \qquad \lambda_2 = \underline{-2}, \lambda_3 = \underline{4}$$

$$(\lambda \pm a)(\lambda \pm b)$$

$$\text{EV: } (A - \lambda I) x \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \in \mathbb{R} \\ x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_1 = -s \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = t \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \\ x_1 = t \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\underline{E_{-2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\lambda_3 = 4: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = u \in \mathbb{R} \\ x_2 = -u \in \mathbb{R} \\ x_1 = u \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$E_4 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}^{10} \underline{x} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^{10} \underline{\underline{T}}^{-1} \underline{x} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{D}}^{10} \underline{z} \qquad \underline{\underline{T}}\,\underline{z} = \underline{x}$$

$$z: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} z_3 = 0 \\ z_2 = 2 \\ z_1 = 1 \end{array} \quad \Rightarrow \underline{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{10} \underline{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 \\ 0 & 0 & 4^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\underline{y}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \overset{\text{Euler}}{\Longrightarrow} \underline{y}(t) = e^{\underline{\underline{A}}t}\,y_0$$

gekoppeltes Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \dots\dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

$$y' = Ay = TDT^{-1}y$$ falls A min. halbeinfach

$$\underbrace{T^{-1}y'}_{z'} = D\underbrace{T^{-1}y}_{z}$$

$$T^{-1}y = z$$

$$Tz = y$$

$$z' = Dz$$

$$\begin{aligned} z_1' &= d_1 z_1 \\ z_2' &= \quad d_2 z_2 \\ &\vdots \\ z_n' &= \qquad\quad d_n z_n \end{aligned}$$

Euler-Ansatz

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{d_1 t}\cdot c_1 = e^{\lambda_1 t}c_1 \\ z_2(t) &= e^{d_2 t}\cdot c_2 \\ &\vdots \\ z_n(t) &= e^{d_n t}\cdot c_n \end{aligned}$$

$$\underline{z}(t) = e^{\underline{\underline{D}}\,t} \cdot \underline{z}_0 \quad , \quad \underline{z}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{T}}\,\underline{z}(t) = \underline{\underline{T}}\, e^{\underline{\underline{D}}\,t}\, \underline{z}_0 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ t^{(1)} & t^{(2)} & \cdots & t^{(n)} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ \emptyset & & \ddots \; e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} | \\ t^{(n)} \\ | \end{bmatrix}$$

Anfangswerte von $\underline{z}$, nicht y!

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad y' = Ay$$

AWP: $\lim_{x\to\infty} y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a) EW: $\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 0 & 2 \\ -9 & 3-\lambda & 1 \\ -9 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (3-\lambda) \cdot \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\left[\underbrace{-(3-\lambda)(6+\lambda)}_{=18} + 18\right]$$

$\underline{\lambda_1 = 3}$

$\underline{\lambda_2 = 0}$

$\underline{\lambda_3 = -3}$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$, $E_{-3} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{c_1 e^{3x} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\to \infty} + \underbrace{c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\to c_2 [\;]} + \underbrace{c_3 e^{-3x} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\to 0}$$

b) $\lim_{x\to\infty} y(x) \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\to c_1 \overset{!}{=} 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = t \in \mathbb{R} \quad \to \underline{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}$

⚠ $Tz = y \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}} \quad t \in \mathbb{R}$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

~20min

2.) od. 3.)

$$e^A = T e^D T^{-1}$$

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T D^k T^{-1}}{k!}$$

$$= T \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right) T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

$$D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2!} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ \emptyset & & \ddots \; d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & \emptyset \\ & \frac{d_2^2}{2} & \\ \emptyset & & \ddots \; \frac{d_n^2}{2} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{d_1^k}{k!} & & \emptyset \\ & \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{d_2^k}{k!} & \\ \emptyset & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \emptyset \\ & e^{d_2} & \\ \emptyset & & \ddots \; e^{d_n} \end{bmatrix} = e^D$$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{symm.?}$$

$$\text{EW: } \det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - (1-\lambda-2) + 2 - (1-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{6} - 6\right]$$

$$\lambda_1 = \underline{\underline{1}}$$
$$\lambda_2 = \underline{\underline{-1}}$$
$$\lambda_3 = \underline{\underline{4}}$$

$$\text{EV: } (A-\lambda I)x \overset{!}{=} 0:$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\underline{\text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}}$$

$$E_{-1} = \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} , \quad E_4 = \text{span}\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) $$B = \{ E_1 , E_{-1} , E_4 \}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

c) $$e^A = T e^D T^T$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^4 & -2e + 2e^4 & -2e + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 \end{bmatrix}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

~ 40min

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c)**. Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax - b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2} \|Av - b\|_2$ gilt.

$Ax = b$

$S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$

$USV^T x = b$

$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

$\hat{S} V^T x = d_0$

$x = V \hat{S}^{-1} d_0$

U, V orthogonal

$S = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_i})$, λ_i EW $A^T A$ oder AA^T

U: EV von AA^T

V: EV von $A^T A$

$$u^{(i)} = \frac{Av^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

$$v^{(i)} = \frac{A^T u^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$$

a) $\underline{\underline{A^T A x = A^T b}}$

b)

$$V: A^T A = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW}: \det(A^T A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (52-25\lambda)(73-25\lambda) - \underbrace{36^2}_{(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3)^2} \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = 1: \quad 27 \cdot 48 \qquad\qquad \lambda_2 = 1$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)^2$

$\lambda = 2: \quad 2 \cdot 23 \quad ↯$

$\lambda = 3: \quad -23 \cdot -2 \quad ↯$

$\lambda = 4: \quad -48 \cdot -27 \quad ✓ \qquad\qquad \lambda_1 = 4$

$\Rightarrow \quad \sigma_1 = \underline{\underline{2}} \quad , \sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

$$\Rightarrow \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ \hat{S} \\ \\ \}\ 0 \end{matrix}$$

c)

EV: $(A^T A - \lambda I) x \overset{!}{=} 0$

$$\lambda_1 = 4: \quad \cdot\tfrac{4}{3} \left(\begin{matrix} -48 & -36 & | & 0 \\ -36 & -27 & | & 0 \end{matrix} \right. \xrightarrow{G.} \begin{matrix} -48 & -36 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = -\frac{3}{4} x_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \cdot\tfrac{4}{3} \left(\begin{matrix} 27 & -36 & | & 0 \\ -36 & 48 & | & 0 \end{matrix} \right. \xrightarrow{G.} \begin{matrix} 27 & -36 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = \frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{A \cdot v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{A \cdot v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(3)}: \quad u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

$$Ax = b$$
$$USV^T x = b$$
$$SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$
$$\hat{S} V^T x = d_0$$
$$x = V \hat{S}^{-1} d_0 \qquad S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \left.\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ \hline -1 \end{bmatrix}\right. \begin{array}{l} \Big\} d_0 \\ \; d_1 \end{array} \end{array}, \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

$$\hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

aber was, wenn einer der Singulärwerte 0 ist?

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"null bleibt null"

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \xrightarrow{G.} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\,\left|\ \text{Inverse}\right.$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

~ 2-3 min

1.)

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} = 2 + 2\beta \overset{!}{=} 0$

$\begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -5 + 2\alpha \overset{!}{=} 0$

A ist orthogonal

Gib $Q \cdot R = A$ an

$Q = A$, $R = I$

$\underline{\underline{\beta = -1}}$, $\underline{\underline{\alpha = \frac{5}{2}}}$

b)

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{R}$$

$$\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c)

$$|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = \underbrace{|\det(Q)|}_{\pm 1}|\det(R)| = |\det(R)|$$

$$= \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\, \mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

~ 15-20min

3.)

2.)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_3 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, shift right, "k_1"'] \arrow[dd, bend right=60, "k_2"'] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, shift right, "k_1"'] \arrow[dd, bend left=60, "k_2"] \\
\mathcal{B}_1 \arrow[r, "F"] \arrow[u, shift right, "k_1^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & \mathcal{B}_1 \arrow[u, shift right, "k_1^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] \\
\mathcal{B}_2 \arrow[r, "Q"] \arrow[u, shift right, "T"'] & \mathcal{B}_2 \arrow[u, shift right, "T"']
\end{tikzcd}$$

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = \underline{1} \in \mathcal{P}_3$, $\mathcal{F}(x) = \underline{\frac{1}{2}x} \in \mathcal{P}_3$

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y\,[y^2]'\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 2y^2\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \left[\frac{2}{3}y^3\right]_0^1 x = \underline{x^2 - \frac{2}{3}x} \in \mathcal{P}_3$$

Zeigen Linearität von $\mathcal{F}$:

$\forall a, b \in \mathcal{P}_3$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha\, \mathcal{F}(a)$

$\to$ Können (i) & (ii) zusammen überprüfen:

$$\mathcal{F}(a+\alpha b) \overset{!}{=} \mathcal{F}(a) + \alpha \mathcal{F}(b)$$

$$= (a(x)+\alpha b(x)) - \left(\int_0^1 y \cdot [a(y)+\alpha b(y)]' dy\right) x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 [y a'(y) + \alpha y b'(y)] dy\right) x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 y a'(y) dy + \alpha \int_0^1 y b'(y) dy\right) x$$

$$= a(x) - \left(\int_0^1 y a'(y) dy\right) x + \alpha \left[b(x) - \left(\int_0^1 y b'(y) dy\right) x \right]$$

$$= \mathcal{F}(a(x)) + \alpha \mathcal{F}(b(x)) \quad \square$$

b) $B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$\begin{array}{lll}
1 \xrightarrow{F} 1 & = \underline{1}\, 1 + \underline{0}\, x + \underline{0}\, x^2 \\
x \xrightarrow{F} \frac{1}{2} x & = 0\, 1 + \frac{1}{2} x + 0 x^2 \\
x^2 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3} x & = 0\, 1 - \frac{2}{3} x + 1 x^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_3 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{P}_3 \\
\downarrow k_1 & & \downarrow k_1 \\
B_1 & \xrightarrow{F} & B_1
\end{array}$$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad Fx = \mathcal{F}\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) $B_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3$

$B_2 = \{\underset{b^{(1)}}{x-1}, \underset{b^{(2)}}{x+1}, \underset{b^{(3)}}{x^2-1}\} \subseteq \mathcal{P}_3$

1)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \\ x &= \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2} \\ x^2 &= b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \end{aligned}\right\}$$

B_2 ES & minimal, da nur 3 Vektoren

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Basis}}}$

2)

$$\begin{array}{ccc|c} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} & \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

Rang = 3

$\to$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ ES

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Basis}}}$

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, "k_1"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\ B_2 \arrow[r, "Q"] \arrow[u, "T"] & B_2 \arrow[u, "T"] \end{tikzcd}$$

$x-1 \xrightarrow{I} x-1 = -1\cdot 1 + 1\cdot x + 0x^2$

$x+1 \xrightarrow{I} x+1 = 1\cdot 1 + 1\cdot x + 0x^2$

$x^2-1 \xrightarrow{I} x^2-1 = -1\cdot 1 + 0\cdot x + 1x^2$

$$\Rightarrow T = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

(Falls Q gefragt ist:)

$B_2 \xrightarrow{Q} B_2$

Hier muss <u>nichts</u> gerechnet werden, da

$F(x-1) =$

$F(x) - F(1)$

$\to$ in a) gezeigt?

$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x - 1 =$				
	$(x-1)$	$(x+1)$	(x^2-1)	
$x+1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x + 1 =$				
$x^2-1 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3}x - 1 =$				

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top A x < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

Als letztes

Zeit: ?

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n < 0$, A symm. $\Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists i : \lambda_i < 0 \quad \square$$

b) x ein EV zu $\lambda_i < 0$

$$\Rightarrow x^T A x = x^T \lambda_i x = \lambda_i x^T x = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0 \quad \square$$

c) $\lambda \in \mathbb{C}$ aber λ_i & $\overline{\lambda_i} \in EW(A)$, weil A reell

$$\text{a)} \Rightarrow \lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = (a+bi)(a-bi)$$
$$= a^2 + b^2 > 0$$

$$\Rightarrow \det(A) = \underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda_1}}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}_{>0} \cdots \lambda_i \cdot \cdots \underbrace{\lambda_{n/2} \overline{\lambda_{n/2}}}_{>0} < 0$$

$$\Rightarrow \lambda_i < 0 \quad \square$$

b) analog zu b)

2. Schur-Zerlegung: $\underline{A = SRS^T}$, S: orth.
R: obere rechte Dreiecksmatrix

$\det A = \det R$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \xrightarrow{A} & B_1 \\ \downarrow S^T & & \uparrow S \\ B_2 & \xrightarrow{R} & B_2 \end{array}$$

A ist ähnlich zu R

6. [6 Punkte] Multiple-Choice: Auf dem Extrablatt "Richtig" oder "Falsch" ankreuzen.

a) [1 Punkt] Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine reelle $n \times n$ Matrix, die in Matlab eingegeben wurde. Folgende Befehle werden darauf eingegeben:

```
>> [Q, ~] = qr(A);
>> max(diag( abs(Q.'*Q - eye(size(Q))) )) < 1e-1
```

Kreuzen Sie 'Richtig' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 1 zurückgibt. Kreuzen Sie 'Falsch' an, wenn wir erwarten können, dass Matlab den logischen Wert 0 zurückgibt.

b) [1 Punkt] Sei A eine reelle 3×3 Matrix, welche schiefsymmetrisch ist, das heisst $A^\top = -A$. Dann ist gilt $\det(A) = 0$.

c) [1 Punkt] Wir definieren die Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt dann, dass $P^{100} = P^{21}$.

d) [1 Punkt] Sei A eine reelle 2×2 Matrix und habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Die characteristische Gleichung zu A lautet $x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

e) [1 Punkt] Die LR-Zerlegung einer Matrix A liefert

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Die Determinante von A ist 14.

f) [1 Punkt] Die folgende Matrix ist gegeben,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$.